

# הסתברות למהנדסים

פרק 39 - התפלגות מולטינומית

תוכן העניינים

1. כללי ..... 1

## התפלגות מולטינומית:

### רקע:

ההתפלגות המולטינומית היא התפלגות רב-ממדית, המציינת את תוצאות סדרה של  $n$  ניסויים בלתי תלויים. לכל ניסוי  $r$  תוצאות אפשריות עם סדרת הסתברויות

$$\text{הצלחה: } (p_1, p_2, \dots, p_r) \text{ כאשר מתקיים ש: } \sum_{i=1}^r p_i = 1.$$

עבור:  $i = 1, 2, \dots, r$ , הרכיבו  $Y_i$  של המשתנה המולטינומי מציין את מספר הפעמים

$$\text{בהן נתקבלה התוצאה ה-} i, \text{ כאשר: } \sum_{i=1}^r Y_i = n.$$

בצורה כללית ניתן לרשום את ההתפלגות המולטינומית באופן הבא:

$$Y \sim \text{multi}(n, p_1, p_2, \dots, p_r)$$

פונקציית ההסתברות המשותפת הרב מימדית היא:

$$P(Y_1 = y_1, \dots, Y_r = y_r) = \binom{n}{y_1, y_2, \dots, y_r} \cdot p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r} = \frac{n!}{y_1! \cdot y_2! \cdot \dots \cdot y_r!} p_1^{y_1} \cdot p_2^{y_2} \cdot \dots \cdot p_r^{y_r}$$

### דוגמה (הפתרון בהקלטה):

להלן תוצאות ההצבעה לעיר "מטושן":

| המועמד    | % מצביעים |
|-----------|-----------|
| טד סול    | 62%       |
| בוב שפירו | 12%       |
| דורית מון | 26%       |

נבחרו באקראי, ועם החזרה, 8 מצביעים מהעיר מטושן.

א. מה ההסתברות ש-4 מהם יצביעו עבור טד סול, 1 עבור בוב שפירו והיתר עבור דורית מון?

ב. רשמו את פונקציית ההסתברות המשותפת של מספר מצביעים במדגם לכל מתמודד.

## שאלות:

- (1) בכד 2 כדורים ירוקים, 4 כדורים כחולים ו-4 אדומים. נשלפו באקראי ועם החזרה בין כדור לכדור 12 כדורים. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. 3 כדורים יהיו ירוקים ו-5 כדורים יהיו כחולים.
- ב. 3 כדורים יהיו ירוקים.
- ג. אם נתון שהוצאו 3 כדורים ירוקים, מה הסיכוי שהוצאו 5 כחולים?

- (2) נטיל קובייה הוגנת 10 פעמים.
- א. מה הסיכוי לקבל פעם אחת את התוצאה 1, פעמיים את התוצאה 2 ושלוש פעמים את התוצאה 3?
- ב. מצאו את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שתתקבל התוצאה 1?

- (3)  $X$  הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי כאשר:
- $$p_1 = 0.5, p_2 = 0.3, p_3 = 0.2, n = 20$$
- $X_i$  הוא מספר הניסויים שבהם התקבלה התוצאה  $i$  כאשר:  $i = 1, 2, 3$ .
- א. כיצד  $X_2$  מתפלג?
- ב. כיצד  $X_2 + X_3$  מתפלג?
- ג. האם  $X_1$  ו- $X_2$  הינם משתנים בלתי תלויים?
- ד. כיצד  $X_2 | X_1 = 5$  מתפלג?

- (4)  $X$  הינו משתנה מקרי המתפלג מולטינומי.
- א. יש להוכיח שלכל  $i \neq j$  מתקיים ש:  $COV(X_i, X_j) = -n \cdot p_i \cdot p_j$ .
- ב. מהו מקדם המתאם בין  $X_i, X_j$ ? בטאו התשובה באמצעות  $n, p_i, p_j$ .

## תשובות סופיות:

- (1) א. 0.0581      ב. 0.2362      ג. 0.246
- (2) א. 0.0169      ב. תוחלת:  $\frac{5}{3}$ , שונות:  $\frac{25}{18}$
- (3) א. בינומי עם  $n = 20$ ,  $p = 0.3$       ב. בינומי עם  $n = 20$ ,  $p = 0.5$
- ג. לא.      ד. בינומי עם  $n = 20$ ,  $p = 0.6$
- (4) א. הוכחה.      ב.  $-\sqrt{\frac{p_i \cdot p_j}{(1-p_i) \cdot (1-p_j)}}$